T E C H N I S C H E   U N I V E R S I T Ä T   B E R L I N
Institut für Nachrichtentechnik und Theoretische Elektrotechnik
Fachgebiet Fernmeldetechnik   Prof. Dr.-Ing. P. Noll

Implementierung von FIR- Filtern

Gunnar Eisenberg DSP-Labor WS 2000/2001; letzte Revision: 8.10.2003

1. Grundlagen

Unter Finite Impulse Response (FIR) Filtern versteht man Filter, die zur Berechnung eines Ausgangswertes y(n) nur den gerade anliegenden Eingangswert u(n) und eine begrenzte Anzahl vorangegangener Eingangswerte u(n-q) mit verschiedenen Gewichtungen b_q verknüpfen. FIR Filter werden auch nichtrekursive Filter genannt, es werden also keine vergangenen Ausgangswerte y(n-k); (k>0) des Filters auf den Eingang zurückgekoppelt:

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q \cdot u(n-q)\,. \tag{1}$$

Die wichtigste, namensgebende Eigenschaft der FIR- Filter ist die endliche Impulsantwort der Länge Q+1:

$$h(n > Q) = 0\,. \tag{2}$$

Mit der Definition der diskreten Summenfaltung:

$$y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot u(n-k) \tag{3}$$

folgt aus (1), (2) und (3), dass die Abtastwerte der Impulsantwort h(n) identisch mit den Werten der Koeffizienten b_q sind:

$$h(n) = \sum_{q=0}^{Q} b_q \cdot \delta(n-q)\,. \tag{4}$$

Weitere wichtige Eigenschaften der FIR Filter sind:

- FIR Filter sind (auch bei begrenzten Wortlängen der quantisierten Koeffizienten) zeitlich streng begrenzt, und somit grundsätzlich stabil (BIBO).
- Es können exakt linearphasige Filter realisiert werden.
- Filter mit konstanter Gruppenlaufzeit sind realisierbar.
- Es treten keine Grenzzyklen auf (wie sie bei IIR Filtern entstehen können).
- Steilflankige FIR Sperrfilter erfordern eine höhere Ordnung (Q), und somit einen höheren Multipliziereraufwand, als äquivalente IIR Filter.
- Adaptive Strukturen (zeitvariable Filterkoeffizienten) lassen sich mit FIR Filtern am einfachsten realisieren, da die Stabilität immer gewährleistet ist.

Die Systemfunktion eines FIR- Filters ergibt sich zu:

$$H(z) = \sum_{q=0}^{Q} h(q) \cdot z^{-q} = \sum_{q=0}^{Q} b_q \cdot z^{-q} = z^{-Q} b_0 \sum_{q=0}^{Q} \frac{b_q}{b_0} \cdot z^{Q-q} = b_0 \frac{\prod_{q=1}^{Q} (z - z_{0q})}{z^Q}\,. \tag{5}$$

Die Systemfunktion eines FIR- Filters hat somit Q Nullstellen, die entweder reell sind, oder als konjugiert komplexes Nullstellenpaar auftreten, und eine Q-fache Polstelle im Ursprung. Während die Nullstellen den Frequenzgang bestimmen, gewährleistet der Q-fache Pol die Kausalität des Filters.

2. Direkte Struktur des Filters

Aus (1) bzw. (4) folgt sofort die direkte Struktur (Bild 1).

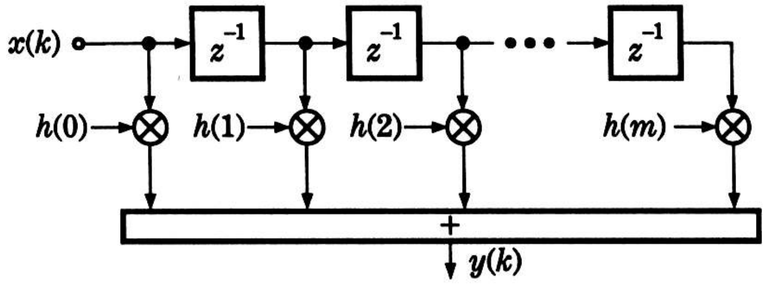

Bild 1: Nichtrekursives Filter in direkter Struktur (Quelle: [2] S.159)

Die direkte Struktur hat gegenüber anderen Realisierungsformen neben der einfachen Überschaubarkeit folgende Vorteile:

- Minimierung der Rauscheinflüsse durch Quantisierung (siehe Abschnitt 3),
- Einfache Implementierung auf DSPs in Assembler, da die Rechenwerke der Prozessoren meist Multiplizierer mit nachgeschalteten Akkumulatoren (Multiplier-Accumulator, MAC) bereitstellen, mit denen die unmittelbare Ausführung der diskreten Faltung möglich ist.

Die direkte Faltung lässt sich gut mit dem Modell der Papierstreifenmethode (Bild 2) erklären, bei der das Eingangssignal quasi an den Koeffizienten vorbei geschoben wird.

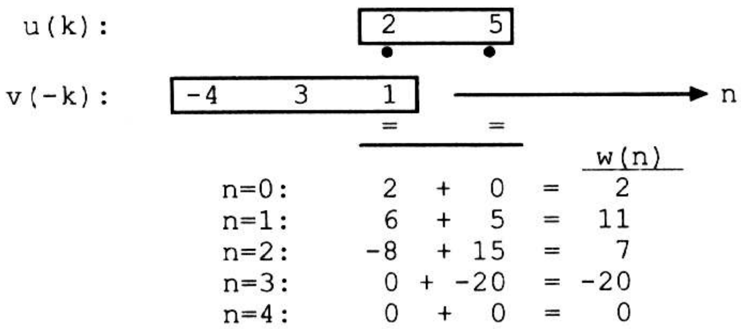

Bild 2: Faltungsoperation w(n)=u(n)∗v(n) mittels der Papierstreifenmethode
(Quelle: [3] S.179)

Um im Speicher ein ständiges Umkopieren (shiften) der vergangenen Eingangswerte zu vermeiden, sollte als Eingangspuffer ein Ringpuffer mit beweglichen Schreib- und Lesezeigern verwendet werden.

3. Darstellung der Koeffizienten als Festkommazahlen

Die im reellen Zahlenbereich $\Re$ berechneten (unbegrenzten) Filterkoeffizienten b_q können zur Verarbeitung in einem DSP entweder als Gleitkommazahlen oder als Festkommazahlen digitalisiert werden. Da die Gleitkommaarithmetik aufwendiger ist, und Gleitkomma-rechenwerke in der Herstellung teurer sind, wird die Festkommadarstellung bevorzugt.

Die Filterkoeffizienten b_q werden quantisiert (gerundet oder beschnitten), so dass sie als Festkommazahlen β_q der Wortlänge M gespeichert werden können:

$$\beta_q = \frac{B_q}{2^b} \qquad \text{mit: } -2^{M-1} \leq B_q \leq 2^{M-1} - 1, \text{ } B_q, b \in \text{(integer)}, \qquad (6)$$

wobei b die Anzahl der Stellen der Festkommazahl hinter dem Komma angibt (je größer b, desto größer die Genauigkeit).

Die eigentliche Quantisierung der Koeffizienten erfolgt über die Berechnung der Hilfsgröße B_q:

$$B_q = round(b_q \cdot 2^b)\ . \qquad (7)$$

Die hierdurch entstehenden Quantisierungsfehler wirken sich auf die Lage der Nullstellen der Systemfunktion in der z-Ebene, und somit auf die Impulsantwort aus. Ein ursprünglich erfülltes Toleranzschema kann nach der Quantisierung der Koeffizienten verletzt werden.

Auf den ersten Blick erscheint ein maximal großes b sinnvoll, jedoch zeigt sich, dass ein zu großes b und somit zu genauer Koeffizient β_q zu breite Binärwörter zur Folge hat (vgl. Abschnitt 4 und 5).

4. Berechnung der Wortbreiten im DSP

Bei der Multiplikation eines Filterkoeffizienten β_q der Breite M bit mit einem digitalisierten Eingangswert des Filters u(n) der Breite E bit entsteht als Ergebnis ein Wort, das maximal die Breite J bit hat:

$$J = E + M\ . \qquad (8)$$

Dieses J bit breite Wort liegt nun am Akkumulator an (siehe Abschnitt 2) und wird dort mit den anderen Q verzögerten Werten addiert.

Bei der Addition von zwei Binärwörtern der Breite J bit entsteht als Ergebnis ein Wert der maximal die Breite J+1 bit hat. Werden Q+1 Wörter der Breite J bit addiert, so entsteht als Ergebnis ein Wert der Breite A bit:

$$A = J + \log_2(Q+1) = E + M + \log_2(Q+1)\ . \qquad (9)$$

Dieses Ergebnis folgt aus der Überlegung, dass man zwei J+1 bit breite Wörter addiert (die selbst aus zwei Additionen entstanden sind), die als Ergebnis ein J+2 bit breites Wort ergeben, usw.

Die Anzahl Q+1 der zu akkumulierenden Werte wird durch die Länge der Impulsantwort Q+1 festgelegt.

5. Anpassung der Wortbreiten

Falls es theoretisch zu Überläufen kommen kann, muß entweder M,E oder Q reduziert werden. Hierbei wirkt sich die Reduktion der einzelnen Größen jedoch unterschiedlich stark auf die Qualität des Ergebnisses aus.

Nicht sinnvoll:

Reduktion der Eingangswortbreite E um 1 bit $\rightarrow$ 6dB größeres Quantisierungsrauschen des Eingangssignals.

Verkürzung der Impulsantwort für 1 bit Ersparnis $\rightarrow$ Halbierung(!) der Anzahl der Filterkoeffizienten.

Sinnvoll:

Verkürzung der Koeffizientenwortbreite M um 1 bit $\rightarrow$ Verkleinerung der Koeffizientengenauigkeit

Die Verkürzung von Ms bietet sich besonders bei nicht adaptiven Systemen an, da hier die Koeffizienten von vornherein bekannt sind, und eine maximale Genauigkeit evtl. keinerlei Qualitätsverbesserung bringen würde.

6. Ausblick

Neben der direkten Auswertung der Faltung im Zeitbereich mit der Papierstreifenmethode (Bild 2), ist auch eine Blockweise Verarbeitung des Eingangssignals möglich.

Die Eingangsblöcke $u_r(n)$ der Länge L können entweder blockweise gefaltet werden (z.B. mit der Matrixmethode, Bild 3) oder mit Hilfe der schnellen Faltung.

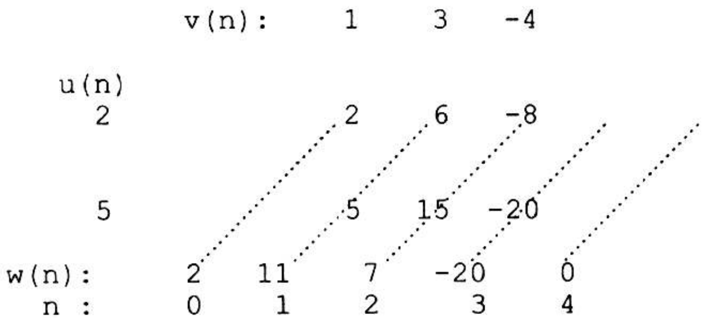

Bild 3: Blockweise Faltung w(n)=u(n)$*$v(n) mittels der Matrixmethode (Quelle [3] S.179)

Bei der schnellen Faltung kann Rechenaufwand gespart werden, wenn die Transformation der Impulsantwort H(k) offline berechnet und gespeichert wird. Außerdem müssen die Eingangsblöcke $u_r(n)$ der Länge L und die Impulsantwort h(n) der Länge Q+1 unbedingt mittels zero padding auf eine Länge $2^a = N \geq L+Q$ (mit $a \in \aleph$) erweitert werden um FFTs anstelle von DFTs durchführen zu können.

Die bei blockweiser Verarbeitung des Eingangssignals entstehenden Ausgangsblöcke müssen zeitversetzt addiert werden (overlap- add).

7. Literatur

[1] Azizi, Seyed Ali: *Entwurf und Realisierung digitaler Filter.* R.Oldenbourg, 1988

[2] Kammemeyer, Karl Dirk; Kroschel, Kristian: *Digitale Signalverarbeitung.* B.G.Teubener, 1998

[3] Noll, Peter: *Signale und Systeme*. TU Berlin, FG Fernmeldetechnik, 1999. – Script zur Vorlesung

[4] Yates, Randy: *Practical Considerations in Fixed-Point FIR Filter Implementations.* Digital Sound Labs, 2000